TUGAS MODEL LINEAR

Dosen: Dr. Purhadi, M.Sc

Kasus:

Menurut hasil penelitian, terdapat perbedaan ukuran (*size*) rumah tangga antara pedesaan dan perkotaan. Selain itu, pendidikan ibu turut andil dalam menentukan jumlah anggota rumah tangga. Untuk menguji kebenaran pernyataan tersebut akan diteliti pengaruh perbedaan status tempat tinggal (kota dan desa), dan tingkat pendidikan ibu (<=SMP, SMA, dan PT) terhadap ukuran rumah tangga. Untuk maksud tersebut, rancangan surveinya sebagai berikut:

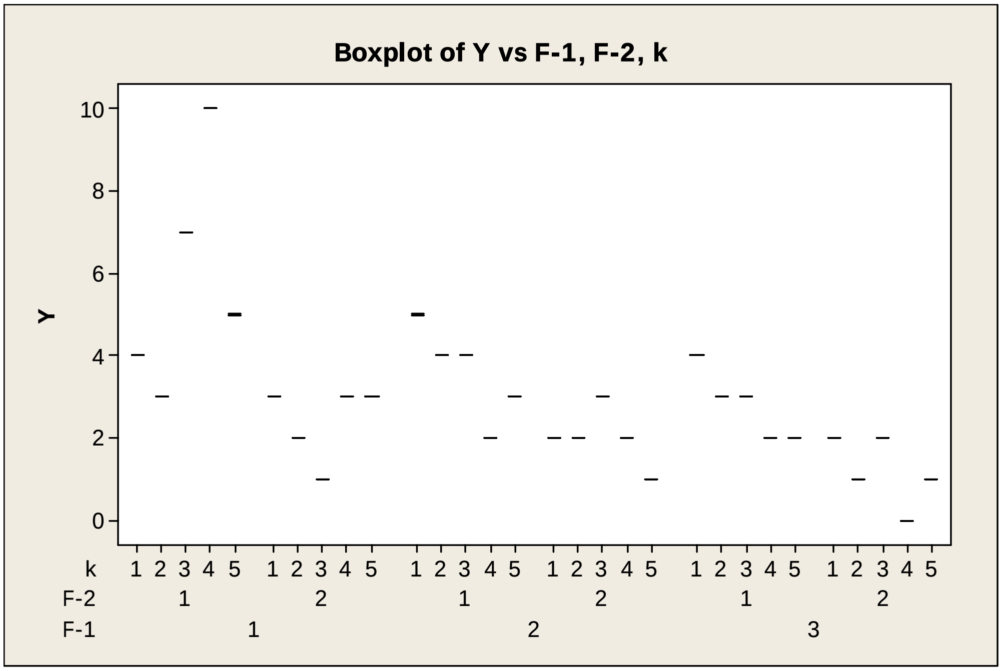
1. Unit penelitian: Rumah Tangga
2. Lokasi Penelitian: Kota Surabaya dan Kabupaten Sampang
3. Faktor-1: Status Tempat Tinggal
   Level Faktor-1: 1 = Desa 2 = Kota
4. Faktor-2: Status Pendidikan Ibu:
   Level Faktor-2: 1 = Maksimum SMP, 2 = SMA, 3 = Perguruan Tinggi.
5. Jumlah Replikasi: 5

I. Model Dengan Interaksi

A. Asumsi Kedua Faktor Dianggap Fixed

Tabel 1. Jumlah anak yang dilahirkan ibu menurut status pendidikan dan tempat tinggal

		Status Daerah	
		Desa	Kota
Pendidikan Ibu	SMP ke bawah	4, 3, 7, 10, 5	3, 2, 1, 3, 3
	SMA	5, 4, 4, 2, 3	2, 2, 3, 2, 1
	PT	4, 3, 3, 2, 2	2, 1, 2, 0, 1



Ket: F-1=Tingkat Pendidikan Ibu; F-2=Status tempat tinggal;k=replikasi

Kasus I: Kedua faktor F-1 dan F-2 diasumsikan tetap.

Model: $y_{ijk} = \mu + \tau_i + \gamma_j + (\tau\gamma)_{ij} + \varepsilon_{ijk}; i = 1,2,3; j = 1,2; k = 1,2,...,5.$ (1.1)

Asumsi (1.1):

a. $\varepsilon_{ijk} \sim IIDN(0,\sigma^2) \Leftrightarrow y_{ijk} \sim N\left(\mu + \tau_i + \gamma_j + (\tau\gamma)_{ij}, \sigma^2\right);$

b. $E\left(\varepsilon_{ijk}\right) = 0 \Leftrightarrow E\left(y_{ijk}\right) = \mu + \tau_i + \gamma_j + (\tau\gamma)_{ij};$

c. $\text{var}\left(\varepsilon_{ijk}\right) = \sigma^2 \Leftrightarrow \text{var}\left(y_{ijk}\right) = \sigma^2;$

d. $\sum_{i=1}^{3} \tau_i = \sum_{j=1}^{2} \gamma_j = 0; \sum_{i=1}^{3} (\tau\gamma)_{ij} = \sum_{j=1}^{2} (\tau\gamma)_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} (\tau\gamma)_{ij} 0.$

Model (1.1) dapat dinyatakan sebagai,

$\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ (1.2)

Dengan

$\mathbf{y} = \left(y_{111}, y_{121}, y_{211}, y_{221}, y_{311}, y_{321}, \ . \ . \ . \ , y_{115}, y_{125}, y_{215}, y_{225}, y_{311}, y_{325}\right)^T;$

$\boldsymbol{\beta} = (\mu, \tau_1, \tau_2, \gamma_1, (\tau\gamma)_{11}, (\tau\gamma)_{21})^T$ di mana

$\tau_3 = -\tau_1 - \tau_2; \gamma_2 = -\gamma_1; (\tau\gamma)_{12} = -(\tau\gamma)_{11}; (\tau\gamma)_{31} = -(\tau\gamma)_{11} - (\tau\gamma)_{21};$
$(\tau\gamma)_{32} = (\tau\gamma)_{11} + (\tau\gamma)_{21}$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A.1 Estimasi Parameter

Dengan MLE, estimasi parameter $\boldsymbol{\beta}$ dapat dihitung dengan formula,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}\,. \tag{1.3}$$

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 20 \end{bmatrix};$$

$$\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/30 & -1/30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/30 & 2/30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/30 & -1/30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/30 & 2/30 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{X}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 89 \\ 21 \\ 8 \\ 33 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix};\ \hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2.96667 \\ 1.13333 \\ -0.16667 \\ 1.10000 \\ 0.60000 \\ -0.30000 \end{bmatrix}$$

Hasil-hasil estimasi seluruh parameter sebagai berikut:

$\hat{\mu} = 2.96667;$

$\hat{\tau}_1 = 1.13333; \hat{\tau}_2 = -0.16667; \hat{\tau}_3 = -1.13333 + 0.16667 = -0.96666;$

$\hat{\gamma}_1 = 1.1; \hat{\gamma}_2 = -1.1;$

$(\tau\gamma)_{11} = 0.6; (\tau\gamma)_{21} = -0.3;$

$(\tau\gamma)_{12} = -0.6; (\tau\gamma)_{22} = 0.3;$

$(\tau\gamma)_{31} = -0.6 + 0.3 = -0.3; (\tau\gamma)_{32} = 0.6 - 0.3 = 0.3;$

A.2 Uji Hipotesis

Tabel Anova

Sumber Variasi	Derajat Bebas	Sum of Squares	Mean Squares	F
Faktor-1	I-1 = 3 – 1 = 2	SS_A = 22.46667	11.233335	5.76
Faktor-2	J-1 = 2 – 1 = 1	SS_B = 36.3	36.3	18.62
Interaksi	(I-1)(J-1) = 2	SS_{AB} = 5.4	2.7	1.38
Error	IJ(K-1) = 24	SSE = 46.8	1.95	
Total	IJK – 1 = 29	SST = 110.96667		

$$SST = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{IJK};$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{K} \frac{y_{ij.}^2}{K};$$

$$SS_{AB} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{K} \frac{y_{ij.}^2}{K} - \sum_{i=1}^{I} \frac{y_{i..}^2}{JK} - \sum_{j=1}^{J} \frac{y_{.j.}^2}{IK} + \frac{y_{...}^2}{IJK};$$

$$SS_B = \sum_{j=1}^{J} \frac{y_{.j.}^2}{IK} - \frac{y_{...}^2}{IJK};$$

$$SS_A = \sum_{i=1}^{I} \frac{y_{i..}^2}{JK} - \frac{y_{...}^2}{IJK}.$$

		F-2		Total
		1	2	
F-1	1	$Y_{11.}$ = 29	$Y_{12.}$ = 12	$Y_{1..}$ = 41
	2	$Y_{21.}$ = 18	$Y_{22.}$ = 10	$Y_{2..}$ = 28
	3	$Y_{31.}$ = 14	$Y_{32.}$ = 6	$Y_{3..}$ = 20
Total		$Y_{.1.}$ = 61	$Y_{.2.}$ = 28	$Y_{...}$ = 89

$$SS_A = \sum_{i=1}^{I} \frac{y_{i..}^2}{JK} - \frac{y_{...}^2}{IJK} = \frac{1}{(2)(5)}\left[41^2 + 28^2 + 20^2\right] - \frac{89^2}{(3)(2)(5)} = 22.46667;$$

$$SS_B = \sum_{j=1}^{J} \frac{y_{.j.}^2}{IK} - \frac{y_{...}^2}{IJK} = \frac{1}{(3)(5)}\left[61^2 + 28^2\right] - \frac{89^2}{(3)(2)(5)} = 36.3;$$

$$SST = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{IJK}$$

$$= \left[4^2 + 3^2 + 7^2 + 10^2 + 5^2 + ... + 2^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2 + 1^2\right] - \frac{89^2}{(3)(2)(5)}$$

$$= 375 - \frac{89^2}{(3)(2)(5)} = 110.96667$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{K} \frac{y_{ij.}^2}{K} = 375 - \frac{1}{5}\left[29^2 + 12^2 + 18^2 + 10^2 + 14^2 + 6^2\right]$$

$$= 375 - 328.2 = 46.8$$

$SS_{AB} = SST - (SS_A + SS_B + SSE) = 110.96667 - (22.46667 + 36.3 + 46.8) = 5.4$

A.2.1 Menguji Hipotesis Ho : $\tau_1 = \tau_2 = \tau_2 = 0$ lawan Ha : ada minimal satu $\tau_i; i = 1, 2, 3$ tidak sama dengan nol.

Berdasarkan Tabel ANOVA di atas, diperoleh statistik uji $F_{hit} = 5.76$. Nilai ini lebih besar daripada nilai $F_{0.05;2,24} = 3.40$. Artinya, telah cukup bukti untuk dapat menolak Ho. Dengan kata lain, terdapat perbedaan jumlah anak yang dilahirkan dari perbedaan pendidikan ibu.

A.2.2 Menguji Hipotesis Ho : $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ lawan Ha : ada minimal satu $\gamma_j; j = 1, 2$ tidak sama dengan nol.

Berdasarkan Tabel ANOVA di atas, diperoleh statistik uji $F_{hit} = 18.62$. Nilai ini lebih besar daripada nilai $F_{0.05;1,24} = 4.26$. Artinya, telah cukup bukti untuk dapat menolak Ho. Dengan kata lain, terdapat perbedaan jumlah anak yang dilahirkan dari perbedaan status tempat tinggal ibu.

A.2.3 Menguji Hipotesis

Ho : $(\tau\gamma)_{11} = (\tau\gamma)_{21} = (\tau\gamma)_{31} = (\tau\gamma)_{12} = (\tau\gamma)_{22} = (\tau\gamma)_{32} = 0$ lawan

Ha : ada minimal satu $(\tau\gamma)_{ij}\,; i = 1,2,3;\ j = 1,2$ tidak sama dengan nol.

Nilai F_{hit} seperti tampak pada tabel ANOVA sama dengan 1.38. Nilai ini lebih kecil dibanding Nilai $F_{0.05;2,24} = 3.40$. Hipotesis nol tidak ditolak. Artinya, tidak terdapat perbedaan jumlah anak yang dilahirkan di antara ibu berpendidikan sama di desa dan di kota begitu juga sebaliknya.

A.2.4 Uju Parsial

a. Ho: $\tau_i = 0; i = 1,2,3$

Ha: $\tau_i \neq 0; i = 1,2,3$

b. Ho: $\gamma_j = 0;\ j = 1,2$

Ha: $\gamma_i \neq 0;\ j = 1,2$

$$\operatorname{var}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\hat{\sigma}^2 = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}MSE$$

$$= \begin{bmatrix} 1/30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/30 & -1/30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/30 & 2/30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/30 & -1/30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/30 & 2/30 \end{bmatrix} 1.95$$

$$\operatorname{var}(\hat{\tau}_1) = \frac{2}{30}1.95 = 0.13; SE(\hat{\tau}_1) = \sqrt{0.13} = 0.3606$$
$$\operatorname{var}(\hat{\tau}_2) = \frac{2}{30}1.95 = 0.13; SE(\hat{\tau}_2) = \sqrt{0.13} = 0.3606$$
$$\operatorname{var}(\hat{\gamma}_1) = \frac{1}{30}1.95 = 0.065; SE(\hat{\gamma}_1) = \sqrt{0.065} = 0.2550$$
$$\operatorname{var}\left((\tau\gamma)_{11}\right) = \frac{2}{30}1.95 = 0.13; SE\left((\tau\gamma)_{11}\right) = \sqrt{0.13} = 0.3606$$
$$\operatorname{var}\left((\tau\gamma)_{21}\right) = \frac{2}{30}1.95 = 0.13; SE\left((\tau\gamma)_{21}\right) = \sqrt{0.13} = 0.3606$$

Selanjutnya, hasil perhitungan dapat diringkas sebagai berikut:

Estimator	Estimasi	SE	t	$t_{0.05,n-1}$	Keputusan
$\hat{\tau}_1$	1.13333	0.3606	3.14	2.045	Tolak Ho
$\hat{\tau}_2$	-0.16667	0.3606	-0.46	2.045	Tdk Tolak Ho
$\hat{\tau}_3$	-0.96666	0.5100	-1.90	2.045	Tdk Tolak Ho
$\hat{\gamma}_1$	1.1	0.2550	4.31	2.045	Tolak Ho
$\hat{\gamma}_1$	-1.1	0.2550	-4.31	2.045	Tolak Ho
$(\tau\gamma)_{11}$	0.6	0.3606	1.66	2.045	Tdk Tolak Ho
$(\tau\gamma)_{21}$	-0.3	0.3606	-0.83	2.045	Tdk Tolak Ho

Kesimpulan:

a. Rata-rata jumlah anak yang dimiliki ibu berpendidikan SMP ke bawah berbeda secara signifikan dari ibu dengan pendidikan SMA dan PT.

b. Ada perbedaan jumlah anak yang dilahirkan dari ibu yang tinggal di pedesaan dan di pekotaan.

Kasus 2. Sama seperti kasus 1 tetapi dengan menganggap Faktor-1 sebagai efek random dengan model sebagai berikut:

$$y_{ijk} = \mu + a_i + \gamma_j + c_{ij} + \varepsilon_{ijk}; i = 1,2,3;\ j = 1,2; k = 1,2,3,4,5$$

2.1 Estimasi Parameter

Estimasi Parameter Model Efek Campuran sesungguhnya sama seperti model Efek tetap. Yang berbeda hanya Uji hipotesisnya. Pada model efek campuran, Statistik Uji F untuk faktor-a diperoleh dari perbandingan MS Faktor-1 dengan MS interkasi F-1*F-2. Demikian juga untuk Faktor-2. Untuk kajian teoritisnya silakan merujuk pada tulisan penulis yang berhubungan dengan masalah ini.

Berdasarkan output berikut, tampak bahwa, Faktor-1 dan Faktor interaksi tidak signifikan.

General Linear Model: Y versus F-1, F-2

```
Factor  Type    Levels  Values
F-1     random       3  1, 2, 3
F-2     fixed        2  1, 2


Analysis of Variance for Y, using Adjusted SS for Tests

Source   DF   Seq SS  Adj SS  Adj MS      F      P
F-1       2   22.467  22.467  11.233   4.16  0.194
F-2       1   36.300  36.300  36.300  13.44  0.067
F-1*F-2   2    5.400   5.400   2.700   1.38  0.270
Error    24   46.800  46.800   1.950
Total    29  110.967
```

Kasus 3. Sama seperti kasus 1 tetapi dengan menganggap Faktor-1 dan Faktor-1 sebagai efek random dengan model sebagai berikut:

General Linear Model: Y versus F-1, F-2

```
Factor  Type    Levels  Values
F-1     random       3  1, 2, 3
F-2     random       2  1, 2

Analysis of Variance for Y, using Adjusted SS for Tests

Source   DF   Seq SS  Adj SS  Adj MS      F      P
F-1       2   22.467  22.467  11.233   4.16  0.194
F-2       1   36.300  36.300  36.300  13.44  0.067
F-1*F-2   2    5.400   5.400   2.700   1.38  0.270
Error    24   46.800  46.800   1.950
Total    29  110.967
```